

113學年度中區縣市政府教師甄選策略聯盟

【科目名稱：國中數學】

選擇題【共50題，每題2分，共100分】請以2B鉛筆於答案卡上作答，單選題；答錯不倒扣。

1. 已知實數 (x, y) 滿足聯立方程式 $x^2y=3$ 與 $x+xy=4$ ，試問 $x+y$ 之最大值為下列何者？

- (A) 3 (B) $\frac{10}{3}$ (C) 4 (D) 5

2. 試問 $2^{\frac{1 \times 2}{2}} + 2^{\frac{2 \times 3}{2}} + 2^{\frac{3 \times 4}{2}} + \dots + 2^{\frac{99 \times 100}{2}}$ 除以7後，餘數必為下列何者？

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

3. 試問函數 $y=x^2$, $y=x$ 及 $x=2$ 圖形所包圍區域之面積為下列何者？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 2

4. 已知 a 為實數，試問下列何者正確？

(A) 如果極限 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 必存在

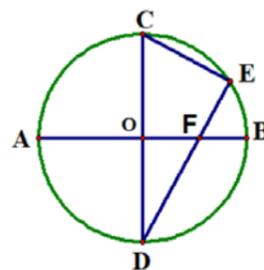
(B) 如果極限 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 必同時存在

(C) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \beta \neq 0$ 都存在，其中 α, β 為實數，則極限 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \frac{\beta}{\alpha}$

(D) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \alpha \neq 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \beta \neq 0$ 都存在，其中 α, β 為實數，則極限 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \frac{1}{\beta} - \alpha$

5. 有一圓其圓心為 O 點， \overline{AB} 及 \overline{CD} 為二直徑，使得 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，過 D 點作 \overline{DE} 交此圓於 E 點，交 \overline{AB} 於 F 點（如右圖所示）。如果 $\overline{DF} = 6$, $\overline{EF} = 2$ ，試問 \overline{CE} 為下列何者？

- (A) 3
(B) 4
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $4\sqrt{2}$



6. 已知 p 為質數，如果一元二次方程式 $x^2 - px - 276p = 0$ 有兩個整數解 $\alpha < \beta$ ，試問 $\beta - \alpha$ 之值為下列何者？

- (A) 23
(B) 69
(C) 138
(D) 161

7. 已知 a, b 為二數，且滿足 $|a| + a + b = 10$ ，及 $a + |b| - b = 12$ ，試問 $a + b$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{18}{5}$
(B) 8
(C) $\frac{46}{5}$
(D) 11

8. $\triangle ABC$ 中，已知 D 為邊 \overline{BC} 上一點，使得 $\angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$ ；如果 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 2$ ，試問 \overline{AD} 之值為下列何者？

- (A) $\frac{2}{3}$
(B) $\frac{4}{3}$
(C) 2
(D) 3

9. 問矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩(rank)為下列何者?

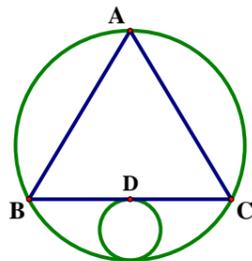
- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

10. 已知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，如果 $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = \frac{7}{3}$ ，試問 $\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta}$ 之值?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

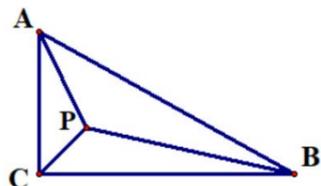
11. 已知等腰 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，如果 $\triangle ABC$ 的外接圓(即大圓)的半徑為 6，小圓與大圓相切，且切於 \overline{BC} 的中點 D ，如圖所示。已知 $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$ ，試問小圓的半徑為下列何者?

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) 2
(C) $\frac{8}{3}$ (D) 3



12. 已知 $\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，使得 $\angle APB = \angle APC = \angle CPB$ ，且 $\overline{PA} = 8$ ， $\overline{PC} = 6$ ，如圖所示，試問 \overline{PB} 之長為下列何者?

- (A) 12 (B) 20 (C) 42 (D) 60



13. 已知三角形 ABC 之三邊長分別為 a, b, c ，且其外接圓半徑為 R 。若 $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ ，試問 $\triangle ABC$ 之三內角之度數為下列何者?

- (A) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (B) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (C) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ (D) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

14. 已知函數 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2024)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2024)}$ ，試問微分 $f'(0)$ 之值為下列何者?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2024

15. 設 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ ，試問 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$ 之值為下列何者?

- (A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 30

16. 已知函數 f 在區間 $[a, b]$ 上連續，其中實數 $a < b$ ，如果滿足 $\int_a^b f(x)dx = 0$ ，試判斷下列何者為正確?

- (A) 存在一點 $x \in [a, b]$ ，使得 $f(x) = 0$
(B) 對於任意一點 $x \in [a, b]$ ，都有 $f(x) = 0$
(C) $\int_a^b f^2(x)dx = 0$
(D) 如果另一連續函數 g 滿足 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ，則 $f(x) \leq g(x)$ ，對所有 $x \in [a, b]$ 均成立

17. 試問函數 $f(x) = \cos x$ 在區間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之平均值為下列何者?

- (A) $\frac{2}{\pi}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. 設 $\alpha, \beta, p, q, r, s$ 為實數，如果 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - px + q = 0$ 的二根，且 $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$ 為方程式 $x^2 - rx + s = 0$ 的二根，試問 rs 等於下列何者?

- (A) pq (B) $\frac{1}{pq}$ (C) $\frac{p}{q^2}$ (D) $\frac{q}{p^2}$

19. 若正數 a, b 滿足 $\log_a b = 10$ ，如果 x 為正數且 $x \neq 1$ ，試問 $\frac{(\log_a x) \cdot (\log_x \frac{b}{a})}{(\log_x b) \cdot (\log_{ab} x)}$ 之值必為下列何者?

- (A) 9 (B) $\frac{99}{10}$ (C) 10 (D) $\frac{109}{10}$

20. 試問 $\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} + \frac{3+2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

21. 試問無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 必為下列何者？

- (A) 級數收斂且其值為 1
(B) 級數收斂且其值為 -1
(C) 級數收斂且其值為 $\frac{1}{2}$
(D) 級數發散

22. 已知實數 a, b, c 滿足 $a = \sqrt{2} + b$ 與 $2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$ ，試問下列何者正確？

- (A) $a = \sqrt{2}$ (B) $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $c = 1$ (D) $a + b + c = 0$

23. 試問積分 $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

24. 有一凸 n 邊形，如果其中 $(n-1)$ 個的內角度數之總和為 2024° ，試問 n 之值為下列何者？

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

25. 試問行列式 $\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 之值為下列何者？

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

26. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標分別為 $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, 1, 2)$ ，試問下列何者為錯誤？

- (A) $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$
(B) $\overline{AB} = (1, 2, -1)$
(C) $\overline{AB} \times \overline{AC} = 6\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k}$
(D) $\triangle ABC$ 之面積為 $2\sqrt{2}$

27. 7^{223} 除以 11 的餘數是

- (A) 2 (B) 3
(C) 5 (D) 8

28. 哪一個敘述正確？

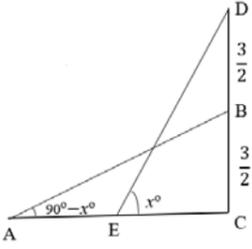
- (A) $0.\bar{3} < \frac{1}{3}$ (B) $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$
(C) $0.\bar{3} > \frac{1}{3}$ (D) 以上皆是

29. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 的值最接近哪一個分數？

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$
(C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

30. 設 f 是除了 0 之外的所有實數有定義的實數值函數，且滿足 $3f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + 1$ ， $f(1) =$

- (A) 0.315 (B) 0.335 (C) 0.355 (D) 0.375

31. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$
- (A) $1 - \frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{4} - 1$
32. 由數字1、2、3組成的4位數，這3個數字的每一個數字至少出現一次，問有多少個這種4位數？
- (A) 24 (B) 30 (C) 33 (D) 36
33. 於歐氏四維空間(Euclidean 4-space)中，哪一個向量集合是與子空間 $\text{sp}((2, 4, 3, 1), (-1, -1, 2, 0))$ 垂直的子空間基底(basis)？
- (A) $\{(2, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$
 (B) $\{(1, 1, -2, 0), (1, 1, -1, 0)\}$
 (C) $\{(2, 0, 1, -7), (1, -1, 0, 2)\}$
 (D) $\{(0, 1, -2, 2), (-2, 0, 1, 1)\}$
34. 全班28人排隊吃營養午餐，若小明堅持要排在小華前面（不一定要相鄰），共有多少種排法？
- (A) 27×28 (B) $27!$ (C) $28!$ (D) $28!/2$
35. 7^{7^7} 的個位數是多少？
- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
36. 已知 a, b, c 是正數且滿足 $abc=1$ ，求 $\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ac} =$
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2
37. 哪一個數不是矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的特徵值(eigenvalue)？
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
38. 哪一個數是 $2\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$ 的解？
- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$
39. 參考右圖。若 $\overline{AB} = 3$ ，則 $\overline{EC} = ?$
- (A) $\sqrt{3}$
 (B) 2
 (C) $2\sqrt{3}$
 (D) $3\sqrt{3}$
- 
40. 求 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{2022} = ?$
- (A) $-i$ (B) i (C) 1 (D) -1
41. 假設 \mathbf{A} 是 3×3 方陣使得 $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。若 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，則 $\mathbf{X} = ?$
- (A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
42. 假設小壽的投籃命中率是五成，期望他在 n 次投籃中最少命中一球的機會超出九成，那麼 n 至少是多少？
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
43. 座標空間有四點 $A(4, 0, 0)$ 、 $B(5, 4, 2)$ 、 $C(0, 4, 0)$ 、 $D(1, 3, 1)$ 。若點 P 在點 C 、 D 連成的直線上，則內積 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 最小可能值是多少？
- (A) 1 (B) 1.25 (C) 1.5 (D) 1.75
44. 已知兩直線 $L_1: 3x+4y=6$ 、 $L_2: kx-3y=4$ 。若 $L_1 \perp L_2$ 且相交於 P ， L_1 交 x 軸於 Q ， L_2 交 x 軸於 R ，求 ΔPQR 之外接圓半徑？
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
45. 求點 $P(1, 2)$ 到直線 $3x+4y=1$ 的最短距離？
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

46. $\sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + 1}$ 最接近哪一個小數?
(A) 1.06 (B) 1.08 (C) 1.1 (D) 1.12
47. 若 $x^2 + (m - 6)x + m - 1 = 0$ 的兩根都是正整數，則 m 是多少?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
48. 設 $a^x + a^{-x} = 2$ ，則 $a^{3x} + a^{-3x} = ?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
49. 求 $\frac{1}{2} \log_{10} \frac{125}{16} + \log_{10} \frac{3\sqrt{8}}{125} - \log_{10} \frac{3}{5} = ?$
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1 (C) 1 (D) 2
50. 若 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)為定義在 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 的二次函數，則下列敘述何者正確?
(A) $f(x)$ 最多有一個極值
(B) $f(x)$ 可能沒有極值
(C) $f(x)$ 至少有兩個極值
(D) 以上皆非

公布用